

## MODELAGEM DE MANCAIS DE ROLAMENTO PARA INCORPORAÇÃO EM MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS COMO ELEMENTOS DE RIGIDEZ GENERALIZADA

**Newton Sure Soeiro**

Universidade Federal do Pará, Departamento de Engenharia Mecânica

Cx. P. 479 - CEP: 66.075-900 – Belém, PA, Brasil

**Gustavo P. D. da Silva**

**Samir N. Y. Gerges**

Universidade Federal de Santa Catarina, Laboratório de Vibrações e Acústica

Cx. P. 476 – CEP: 88.040-900 – Florianópolis, SC, Brasil

**Resumo.** *O estudo da vibração de um sistema rotativo, baseado em um modelo convencional de mancal, descrito por elementos de rigidez translacional, pode prever somente movimentos no plano das superfícies do alojamento ou o movimento de flexão do eixo. Contudo, resultados experimentais têm mostrado que o movimento do alojamento é primariamente do tipo fora do plano. Esta impossibilidade teórica da predição do movimento de flexão do alojamento ocorre, devido a não existência no modelo do mancal de elementos de rigidez que permitam o acoplamento do movimento de flexão do eixo com o movimento do alojamento. Neste artigo apresenta-se o desenvolvimento analítico e numérico que permite, a partir da teoria de contato de Hertz e da hipótese de que os movimentos vibratórios são pequenos, estabelecer a relação básica carga-deflexão, em cada um dos elementos rolantes do mancal, a partir da qual estabelece-se as relações entre o vetor de carga (forças e momentos) transmitido através do mancal e o vetor de deslocamento que lhe dá origem, de modo que o mancal passa a ser representado por uma matriz de rigidez generalizada de ordem  $6 \times 6$ . Esta abordagem é aplicada a um sistema de eixo engrenado, de uma caixa de engrenagem de uso veicular comercial.*

**Palavras-chave:** *Mancais de Rolamento, Rigidez de Mancais, Modelagem de Mancais*

### 1. INTRODUÇÃO

As vibrações em máquinas rotativas têm sido um dos principais obstáculos ao aumento de suas rotações e desempenho. Como tal, o tema têm sido objeto de muitas pesquisas e conferências internacionais. Procedimentos de cálculo sofisticados foram desenvolvidos, os quais permitem a inclusão das características do eixo, mancais e alojamento, com o objetivo de se prever o comportamento vibratório dos sistemas sob estudo. As características do eixo e do alojamento foram largamente pesquisadas e podem ser descritas com confiança e economia aceitável pelos modelos matemáticos estabelecidos. O mancal, contudo, é modelado com muito menos rigor e, freqüentemente, representa a maior fonte de dúvida na predição, o que é particularmente verdade para mancais de elementos rolantes.

Para o caso de sistemas de transmissão constituídos por engrenagens helicoidais, que produzem reações de momento e cargas radial e axial sobre os mancais, os modelos simplificados dos mancais de rolamento não são adequados para uso, uma vez que eles são incapazes de simular de forma correta a transmissão de forças e momentos advindas do engrenamento. Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar o desenvolvimento analítico e numérico para se modelar os mancais de rolamento de modo que além das deflexões radial e axial se leve em conta o efeito da deflexão angular do eixo.

## **2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

Os primeiros estudos desenvolvidos, no passado, estavam relacionados a mancais submetidos a cargas radial e/ou axial. Palmgren (1959) desenvolveu expressões que relacionam as deformações elásticas do rolamento de esfera e de rolo com a carga máxima num elemento rolante. Essas relações estão entre as primeiras representações analíticas de rolamentos sob cargas radial e/ou axial e são muito usadas em outros trabalhos.

Jones (1960) apresentou uma teoria que permite a determinação das constantes de rigidez de rolamentos de rolo radial e de esfera, sob condições arbitrárias de velocidade e carga, levando em conta os efeitos de carregamento centrífugo e giroscópico dos elementos rolantes.

Harris (1966) apresentou um número de arranjos de carregamentos nos rolamentos e usou as equações de força estática, juntamente com as relações carga deflexão que são função da distribuição de carga no rolamento. A determinação da rigidez do rolamento teve por base as fórmulas de Palmgren para rolamentos com carga radial ou axial.

White (1979) usou a análise de mancal de Harris (1966) para estudar um modelo dinâmico de dois graus de liberdade. Ele representou os rolamentos como molas e amortecedores, o eixo como uma massa concentrada e o alojamento como uma massa concentrada e amortecedor. Em sua análise, ele considerou somente o movimento radial dos rolamentos de esfera e rolo.

Rajab (1982) propôs um modelo analítico que assume estar o rolamento submetido a carga radial e momento de flexão. O modelo consiste de rigidez radial e rigidez axial acoplada obtidas a partir da relação carga-deflexão para rolamentos sob carga. O sistema de rolamentos e eixo representa um sistema indeterminado que deve ser analisado para as cargas e deflexões usando as relações carga-deflexão do rolamento e do eixo.

Alguns trabalhos de cunho experimental foram também desenvolvidos, entretanto, a determinação experimental dos coeficientes de rigidez dos rolamentos foi limitada aos coeficientes de rigidez na direção radial e axial. Dentro dessa linha de pesquisa, Stone e Walford (1980) apresentaram a descrição de um dispositivo usado na medição da rigidez radial de um par de rolamentos de contato angular sob condições de oscilação. O objetivo foi de simular condições controladas de rotação, pré-carga e ajuste do eixo e alojamento.

Kraus et al (1987) apresentaram um método para extração das características de rigidez e amortecimento de rolamento sob condições de operação. O método é baseado na análise modal experimental combinado com o modelo matemático de um sistema de um grau de liberdade, que foi usado para a investigação do efeito da velocidade e pré-carga sobre a rigidez e amortecimento do sistema. Os resultados de sua análise mostram que os coeficientes de rigidez radial e axial apresentam comportamento linear e que o efeito da velocidade de rotação do sistema é negligenciável para valores altos de pré-carga.

## **3. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO**

A base do desenvolvimento teórico aqui apresentado tem origem no artigo de Jones (1960). Entretanto, uma simplificação é proposta considerando-se negligenciáveis a força

centrífuga e o momento giroscópico, que atuam em cada elemento rolante, uma vez que esses efeitos são evidentes somente em velocidades de rotação extremamente altas. Por outro lado, é assumido que a posição angular de cada elemento rolante, relativa a qualquer outro elemento, permanece inalterada devido a presença da gaiola e pinos rígidos existentes nos rolamentos e é dada pelo ângulo  $\psi_j$ , conforme Fig. 1.

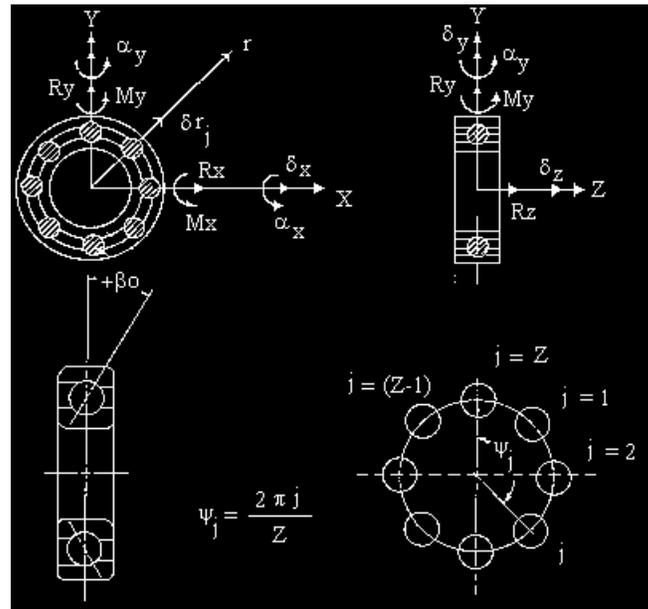


Figura 1 – Sistema de Coordenadas e Posição dos Elementos Rolantes.

O objetivo da análise é a obtenção de uma matriz de coeficientes de rigidez [K], para rolamentos de esfera e de rolo, que possa ser incorporada a modelos numéricos ou analíticos usados na análise dinâmica. Nesta análise, os coeficientes de rigidez são obtidos como função das características cinemáticas e parâmetros de projeto de cada tipo de rolamento, tais como: ângulo de contato sem carga ( $\beta_0$ ), folga radial ( $r_L$ ), número de elementos rolantes ( $Z$ ) e constante carga-deflexão ( $K_{cd}$ ), para os rolamentos de esfera e rolo; fator de curvatura total ( $B$ ), diâmetro do elemento rolante ( $d$ ), raio do centro de curvatura da pista do anel interno ( $r$ ), para o rolamento de esfera; raio do círculo primitivo ( $r$ ), para rolamento de rolo.

### 3.1 Relação carga-deflexão nos rolamentos de esfera e de rolo

Os deslocamentos de translação ( $\delta_i$ ) e de rotação ( $\alpha_j$ ), conforme Fig. 1, com  $i = x, y, z$  e  $j = x, y$ , são deslocamentos médios do rolamento, dados pelos movimentos relativos de corpo rígido entre os anéis interno e externo, e são na realidade uma parcela do deslocamento total a que fica submetido o rolamento, uma vez que existe uma outra parcela de deslocamento que corresponde à variação em torno do valor médio durante a rotação em regime, o que leva a uma variação temporal dos coeficientes de rigidez. Entretanto, em nossa abordagem, esta parcela de deslocamento é negligenciada, devido à hipótese de pequenos deslocamentos provocados pelo movimento vibratório e, conseqüentemente, os coeficientes de rigidez da matriz [K] são invariantes no tempo e dependentes das cargas e deslocamentos médios.

A relação carga-deflexão básica para cada elemento rolante elástico é definida pela teoria da tensão de contato de Hertz como:

$$P_j = K_{cd} \delta_j^n \quad (1)$$

onde  $P_j$  é a carga normal resultante no  $j$ -ésimo elemento rolante,  $K_{cd}$  é a constante carga-deflexão para o contato pista interna-elemento rolante-pista externa e  $n$  uma constante, que para o caso de rolamento de esfera assume o valor de 3/2 e para rolamento de rolo 10/9.

A partir da Fig. 2, pode-se estabelecer a deformação do  $j$ -ésimo elemento rolante, para os rolamentos de esfera (Eq.(2)) e de rolo (Eq. (4)), como:

$$\delta_j = \begin{cases} \delta_E(\psi_j) & , \delta_E(\psi_j) > 0 \\ 0 & , \delta_E(\psi_j) \leq 0 \end{cases}; \quad \delta_E(\psi_j) = A_j - Bd \quad (2)$$

$$Ar_j = Bd \cos \beta_0 + \delta r_j; \quad Aa_j = Bd \sin \beta_0 + \delta a_j; \quad A_j = \sqrt{Ar_j^2 + Aa_j^2} \quad (3)$$

$$\delta r_j = \delta_y \cos \psi_j + \delta_x \sin \psi_j - r_L; \quad \delta a_j = \delta_z + r(\alpha_x \cos \psi_j - \alpha_y \sin \psi_j)$$

$$\delta_j = \begin{cases} \delta_R(\psi_j) & , \delta_R(\psi_j) > 0 \\ 0 & , \delta_R(\psi_j) \leq 0 \end{cases}; \quad \delta_R(\psi_j) = \delta r_j \cos \beta_0 + \delta a_j \sin \beta_0 \quad (4)$$

em que  $\delta_E(\psi_j) \leq 0$  e  $\delta_R(\psi_j) \leq 0$ , nas Eq. (2) e (4) respectivamente, implicam na ausência de tensão no  $j$ -ésimo elemento rolante e  $\delta r_j$  e  $\delta a_j$  são os deslocamentos na direção radial e axial respectivamente.

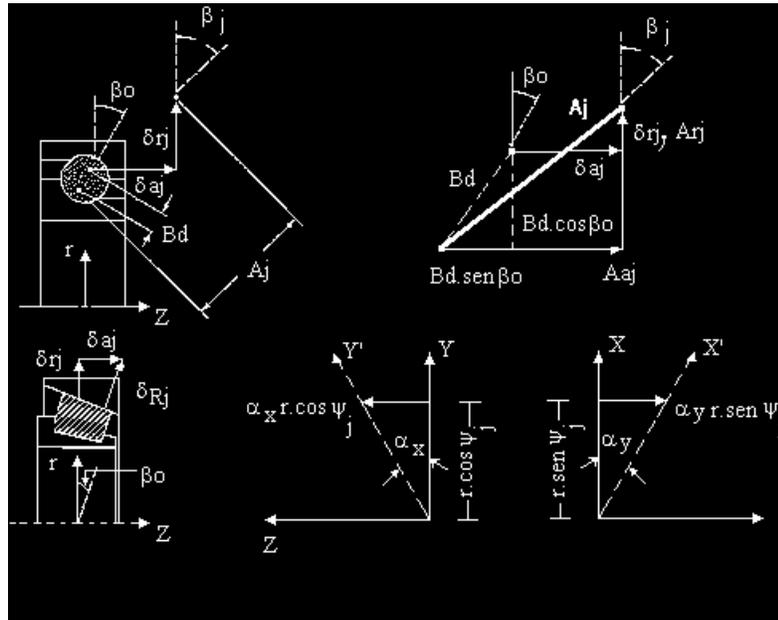


Figura 2 – Deformação Elástica do Elemento Rolante

A matriz de rigidez do rolamento  $[K]$  depende da relação entre o vetor de carga média resultante que atua no rolamento e o respectivo vetor de deslocamento. Esta relação pode ser obtida através da soma vetorial de  $P_j$ , dado pela Eq.(1), para todos os elementos rolantes carregados, levando-nos às seguintes expressões para as forças e momentos no rolamento:

$$R_x = \sum_{j=1}^Z P_j \cos \beta_j \sin \psi_j \quad (5)$$

$$R_y = \sum_{j=1}^Z P_j \cos \beta_j \cos \psi_j \quad (6)$$

$$R_z = \sum_{j=1}^Z P_j \text{sen } \beta_j \quad (7)$$

$$M_x = \sum_{j=1}^Z r P_j \text{sen } \beta_j \text{sen } \psi_j \quad (8)$$

$$M_y = -\sum_{j=1}^Z r P_j \text{sen } \beta_j \text{cos } \psi_j \quad (9)$$

O momento resultante  $M_z$  é nulo devido ao eixo montado no rolamento ser livre para realizar movimento de rotação em torno do eixo coordenado Z.

O ângulo de contato com carga  $\beta_j$ , que aparece nas Eq. (5) a (9), para o caso de rolamento de rolo, permanece relativamente constante e é assumido ser igual ao ângulo de contato sem carga  $\beta_0$ . Por outro lado, para os rolamentos de esfera,  $\beta_j$  pode variar de modo significativo e, neste caso, seu valor é dado por:

$$\beta_j = \text{arc tg} \left( \frac{Bd \text{sen } \beta_0 + \delta a_j}{Bd \text{cos } \beta_0 + \delta r_j} \right) \quad (10)$$

com a seguinte convenção de sinal: positivo quando medido do plano X – Y para o eixo axial Z e negativo em caso contrário, conforme mostrado na Fig. 1.

### 3.2 Matriz de rigidez do mancal

Visto que a relação carga-deflexão do rolamento é não-linear usa-se o processo de linearização, ou seja, toma-se a tangente à curva que representa a relação carga-deflexão próximo ao ponto de equilíbrio estático e, desta forma, obtém-se os coeficientes da matriz de rigidez do rolamento através das derivadas parciais das equações de (5) a (9). Assim, temos:

$$[K]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \delta_j} & \frac{\partial R_i}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \delta_j} & \frac{\partial M_i}{\partial \alpha_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} & k_{x\alpha_x} & k_{x\alpha_y} & k_{x\alpha_z} \\ & k_{yy} & k_{yz} & k_{y\alpha_x} & k_{y\alpha_y} & k_{y\alpha_z} \\ & & k_{zz} & k_{z\alpha_x} & k_{z\alpha_y} & k_{z\alpha_z} \\ \text{Simétrica} & & & k_{\alpha_x\alpha_x} & k_{\alpha_x\alpha_y} & k_{\alpha_x\alpha_z} \\ & & & & k_{\alpha_y\alpha_y} & k_{\alpha_y\alpha_z} \\ & & & & & k_{\alpha_z\alpha_z} \end{bmatrix} \quad i,j = x,y,z \quad (11)$$

As expressões explícitas dos coeficientes  $k_{ij}$ , para rolamento de esfera, são:

$$k_{xx} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(1)} \text{sen}^2 \psi_j ; k_{xy} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(1)} \text{sen } \psi_j \text{cos } \psi_j ; k_{xz} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j \text{sen } \psi_j$$

$$k_{x\alpha_x} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j r \text{sen } \psi_j \text{cos } \psi_j ; k_{x\alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j r \text{sen}^2 \psi_j$$

$$k_{yy} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(1)} \text{cos}^2 \psi_j ; k_{yz} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j \text{cos } \psi_j ;$$

$$\begin{aligned}
k_{y\alpha_x} &= K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j r \cos^2 \psi_j ; k_{y\alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(2)} Ar_j Aa_j r \cos \psi_j \sen \psi_j \\
k_{zz} &= K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} ; k_{z\alpha_x} = K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r \cos \psi_j ; k_{z\alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r \sen \psi_j \\
k_{\alpha_x \alpha_x} &= K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r^2 \cos^2 \psi_j ; k_{\alpha_x \alpha_y} = -K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r^2 \sen \psi_j \cos \psi_j \\
k_{\alpha_y \alpha_y} &= K_{cd} \sum_{j=1}^Z T_j^{(3)} r^2 \sen^2 \psi_j
\end{aligned} \tag{12}$$

onde:

$$\begin{aligned}
T_j^{(1)} &= \frac{\delta_E^n(\psi_j) \left\{ \frac{nAr_j^2 A_j}{\delta_E(\psi_j)} + A_j^2 - Ar_j^2 \right\}}{A_j^3} ; T_j^{(2)} = \frac{\delta_E^n(\psi_j) \left\{ \frac{nA_j}{\delta_E(\psi_j)} - 1 \right\}}{A_j^3} \\
T_j^{(3)} &= \frac{\delta_E^n(\psi_j) \left\{ \frac{nAa_j^2 A_j}{\delta_E(\psi_j)} + A_j^2 - Aa_j^2 \right\}}{A_j^3}
\end{aligned} \tag{13}$$

e para rolamento de rolo:

$$\begin{aligned}
k_{xx} &= nK_{cd} \cos^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen^2 \psi_j ; k_{xy} = 0,5nK_{cd} \cos^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen 2\psi_j \\
k_{xz} &= 0,5nK_{cd} \sen 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen \psi_j ; k_{\alpha_x \alpha_x} = 0,25nrK_{cd} \sen 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen 2\psi_j \\
k_{\alpha_x \alpha_y} &= -0,5nrK_{cd} \sen 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen^2 \psi_j ; k_{yy} = nK_{cd} \cos^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos^2 \psi_j \\
k_{yz} &= 0,5nK_{cd} \sen 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos \psi_j ; k_{y\alpha_x} = 0,5nrK_{cd} \sen 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos^2 \psi_j \\
k_{y\alpha_y} &= -0,25nrK_{cd} \sen 2\beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen 2\psi_j ; k_{zz} = nK_{cd} \sen^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \\
k_{z\alpha_x} &= nrK_{cd} \sen^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos \psi_j ; k_{z\alpha_y} = -nrK_{cd} \sen^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen \psi_j \\
k_{\alpha_x \alpha_x} &= nr^2 K_{cd} \sen^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \cos^2 \psi_j ; \\
k_{\alpha_x \alpha_y} &= -0,5nr^2 K_{cd} \sen^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen 2\psi_j ; \\
k_{\alpha_y \alpha_y} &= nr^2 K_{cd} \sen^2 \beta_0 \sum_{j=1}^Z \delta_R^{n-1}(\psi_j) \sen^2 \psi_j
\end{aligned} \tag{14}$$

Os coeficientes de rigidez, para ambos os rolamentos, relacionados com o grau de liberdade  $\alpha_z$  são nulos, ou seja  $k_{x\alpha_z} = k_{y\alpha_z} = k_{z\alpha_z} = k_{\alpha_x\alpha_z} = k_{\alpha_y\alpha_z} = k_{\alpha_z\alpha_z} = 0$ , devido ao fato de que um mancal de rolamento permite rotação em torno do eixo Z.

#### 4. DETERMINAÇÃO NUMÉRICA DA MATRIZ DE RIGIDEZ

A determinação dos coeficientes de rigidez, que compõem a matriz [K], está condicionada a obtenção dos deslocamentos de translação e rotação que compõem o vetor deslocamento  $\mathbf{q} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z \ \alpha_x \ \alpha_y]^\top$ , o qual por sua vez é consequência do carregamento aplicado no sistema, representado pelo vetor de carga  $\mathbf{F}$ , e responsável pelas reações de apoio que nada mais são do que as cargas e momentos que atuam nos rolamentos.

De um modo genérico, a determinação dos coeficientes de rigidez envolve a solução de um sistema de 5N equações não lineares, para N mancais de rolamento, que são obtidas a partir das Eq. (6) a (9), equações de equilíbrio da estática e da equação diferencial para a deflexão da viga de Euler. O sistema de equações assim obtido é, então, resolvido para a determinação do vetor  $\mathbf{q}$  em cada mancal e os coeficientes de rigidez são obtidos através dos conjuntos de Eq. (12) e (14), para rolamentos de esfera e de rolo respectivamente.

Pela boa característica de convergência, o método de Newton-Rapson modificado é usado

#### 5. APLICAÇÃO DO MÉTODO A UM SISTEMA DE TRANSMISSÃO REAL

Para a exemplificação do método, vamos obter os coeficientes de rigidez para o sistema de transmissão de uma caixa de engrenagem de uso veicular mostrado na Fig. 3. Apresenta-se aqui somente a análise para o eixo carretel, o qual está apoiado sobre dois mancais de rolamento de rolo e um de esfera, cujos respectivos parâmetros de projeto são apresentados na tabela 1. O problema envolve a solução de um total de 15 equações não lineares.

Tabela 1 – Parâmetros de Projeto para os Rolamentos

Parâmetros	Mancais 1 e 2 (Rolo)	Mancal 3 (Esfera)
Constante $K_{cd}$ (N/mm <sup>n</sup> )	4,895	3,786
Nº de Elementos (Z)	16	7
Folga Radial, $r_L$ (mm)	-	0.028
Produto $Bd$ (mm)	-	0.301
Raio $r$	54,50	19,96
Ângulo $\beta_o$ (Graus)	9,7	24,91

Através das equações da estática, aplicadas para os planos X-Z e Y-Z, obtemos as seguintes equações:

$$\sum F_x = R_x^1 + R_x^2 + R_x^3 - F_x^N + F_x^M = 0 \quad (15)$$

$$\sum F_y = R_y^{(1)} + R_y^{(2)} + R_y^{(3)} - F_y^{(N)} - F_y^{(M)} = 0 \quad (16)$$

$$\sum F_z = R_z^{(1)} + R_z^{(2)} + R_z^{(3)} - F_z^{(N)} + F_z^{(M)} = 0 \quad (17)$$

$$\sum M_x = M_x^{(1)} + M_x^{(2)} + M_x^{(3)} - M_x^{(N)} + M_x^{(M)} + R_y^{(3)} C_6 + \dots \quad (18)$$

$$R_y^{(2)}(C_6 - C_4) - F_y^{(M)}(C_6 - C_M) - F_y^{(N)}(C_6 - C_5) = 0$$

$$\sum M_y = M_y^{(1)} + M_y^{(2)} + M_y^{(3)} - R_x^{(3)} C_6 - \dots \quad (19)$$

$$R_x^{(2)}(C_6 - C_4) - F_x^{(M)}(C_6 - C_M) + F_x^{(N)}(C_6 - C_5) = 0$$

onde  $R_j^{(i)}$  e  $M_j^{(i)}$ , com  $i = 1, 2, 3$  e  $j = x, y, z$ , são as reações nos mancais;  $F_j^{(k)}$  e  $M_j^{(k)}$ , com  $k = N, M$ , são as forças e momentos devido as engrenagens neutra (N), da primeira, segunda ou terceira marcha (M), que são função do torque de entrada  $T$ , número de dentes, módulo normal, ângulo de pressão normal e ângulo de hélice das engrenagens.

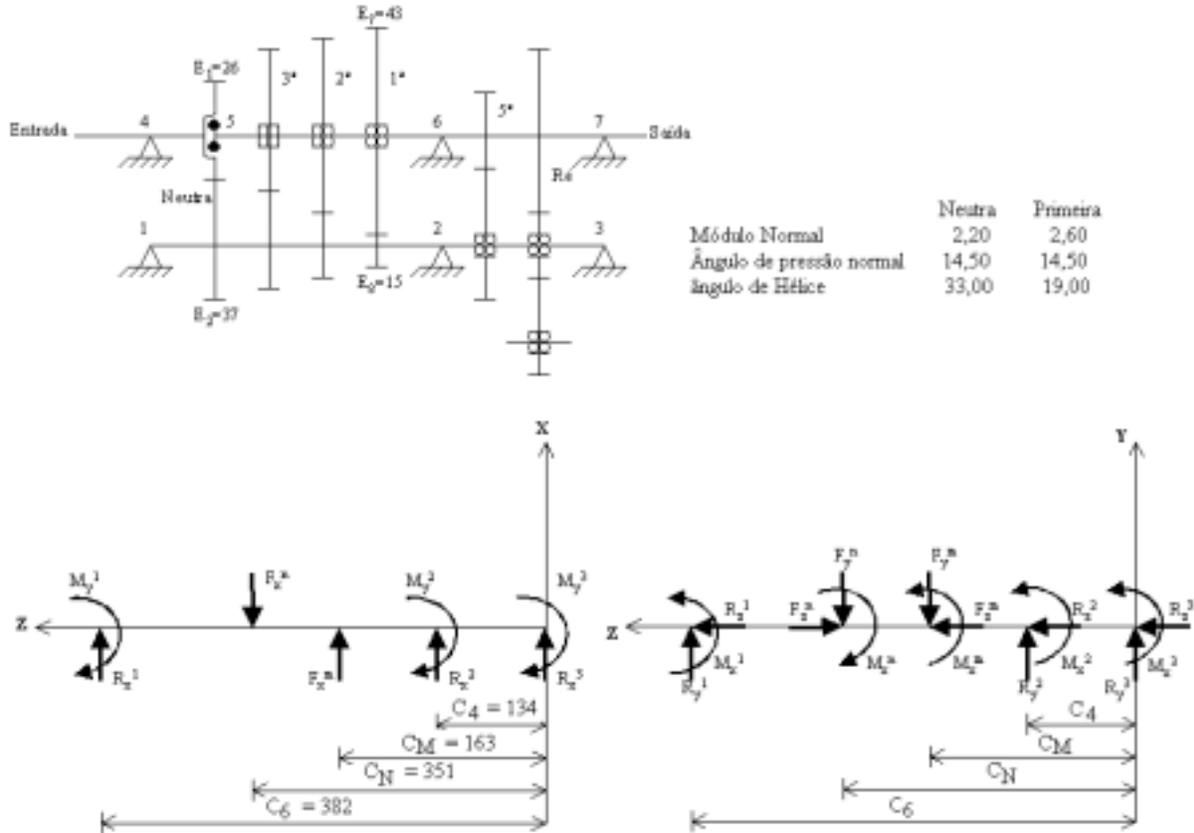


Figura 3 – Esquema do sistema de transmissão de um Caixa de Engrenagem

Considerando o eixo rígido na direção Z, podemos escrever:

$$\delta_z^{(1)} - \delta_z^{(2)} = 0 \quad (20)$$

$$\delta_z^{(1)} - \delta_z^{(3)} = 0 \quad (21)$$

Finalmente, fazendo-se uso da equação diferencial referente a deflexão elástica da viga de Euler, para os planos X - Z e Y - Z, e atribuindo-se as condições de contorno nos mancais ( $z = 0$ ,  $dy/dz = \alpha_x^{(3)}$ ,  $y = \delta_y^{(3)}$ ,  $dx/dz = \alpha_y^{(3)}$  e  $x = \delta_x^{(3)}$ ;  $z = C_4$ ,  $dy/dz = \alpha_x^{(2)}$ ,  $y = \delta_y^{(2)}$ ,

$\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(2)}$  e  $x = \delta_x^{(2)}$ ;  $z = C_6$ ,  $\frac{dy}{dz} = \alpha_x^{(1)}$ ,  $y = \delta_y^{(1)}$ ,  $\frac{dx}{dz} = \alpha_y^{(1)}$  e  $x = \delta_x^{(1)}$ , chega-se a um total de mais oito equações que, por estarem relacionadas a um eixo com oito escalonamentos de diâmetro e pontos de aplicação de carga distintos ao longo do comprimento do eixo, são demais extensas para serem aqui apresentadas.

A Fig. 4 mostra a variação dos coeficientes de rigidez, para o mancal 2 em condição de primeira marcha, segundo uma variação de 20 a 100 % do torque máximo de entrada correspondente a 420 Nm. Como pode ser observado, os valores dos coeficientes de rigidez, que representam o acoplamento entre os movimentos de rotação e translação, aqui representados pelos coeficientes fora da diagonal da matriz [K] e por  $k_{\alpha_x, \alpha_y}$  e  $k_{\alpha_y, \alpha_x}$ , apresentam valores significativos e, assim sendo, não podem ser desprezados em uma análise de transmissibilidade de cargas e momentos. Deve-se ressaltar, ainda, que os modelos convencionais de mancais não são capazes de simular o efeito representados por estes coeficientes.

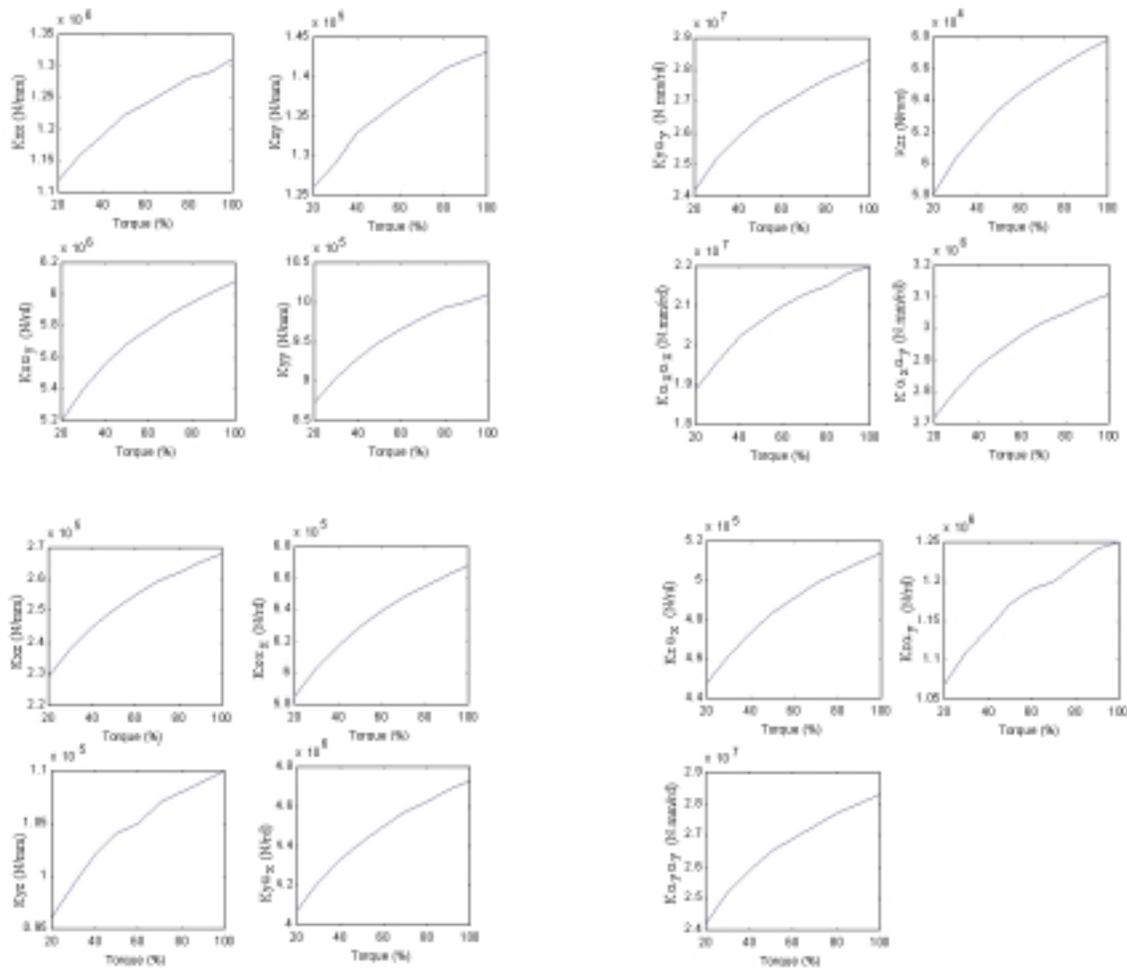


Figura 4 – Variação dos Coeficientes de Rigidez, com o Torque de Entrada, para o Mancal 2 e Condição de Primeira Marcha

## 6. CONCLUSÃO

Foi apresentado um modelo de mancal que inclui todos os possíveis graus de liberdade de corpo rígido de um sistema de mancal. Uma aplicação do método de modelagem, para um

sistema de transmissão composto por eixo escalonado e engrenagens helicoidais, mostrou que não só os elementos de rigidez nas direções radiais e axial são importantes. Assim, a matriz de rigidez proposta neste artigo é capaz de permitir que a transmissão de vibração através dos mancais seja simulada de modo mais realista, uma vez que permite o acoplamento dos movimentos de flexão do eixo com o alojamento e, em consequência, a previsão do movimento fora do plano do alojamento.

## REFERÊNCIAS

- Harris, T. A., 1966, Rolling Bearing Analysis, John Wiley & Sons, New York
- Jones, A. B., 1960, A general theory for elastically constrained ball and radial roller bearings under arbitrary load and speed conditions, Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, June, pp. 309-320.
- Kraus, J., Blech, J. J. e Braun, S. G., 1987, In situ determination of rolling bearing stiffness and damping by modal analysis, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Transactions of the ASME, vol. 109, pp. 235-240.
- Palmgren, A., 1959, Ball and Roller Bearing Engineering, S. H. Burbank, Philadelphia.
- Rajab, M. D., 1982., Modeling of the transmissibility through rolling element bearing under radial and moment loads, Ph.D. Dissertation, The Ohio State University, Ohio, EUA.
- Walford, T. L. H. e Stone, B. J., 1980, The measurement of the radial stiffness of rolling element bearings under oscillating conditions, Journal Mechanical Engineering Science, vol. 22, n. 4, pp.175-181.
- While, M. F., 1979, Rolling element bearing vibration transfer characteristics: effect os stiffness, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, vol. 46, pp. 677-684.

## ROLLING BEARING MODELLING TO BE INCORPORATED IN FINITE ELEMENT MODELS AS GENERALIZED STIFFNESS ELEMENTS

***Abstract.** The study of the vibration of a rotative system, based on conventional bearing models, described by translational stiffness elements, can predict only the purely in-plane type motion on the flexible housing or the bending motion on the shaft. However, experimental results have shown that the housing motion is primarily out-of-plane type. This impossibility happens due to non existence in the bearing model of stiffness elements that allow a coupling between the shaft bending motion and the flexural motion of the gearbox housing. This paper is concerned with the analytic and numeric development that allows one to establish the basic load-deflection relationship for a single rolling element, starting from the Hertz's contact theory and from the hypothesis of the small vibratory motion. This relationship, between the load vector (forces and moments) transmitted through the bearing and the correspondent displacement vector, makes it possible to represent the rolling bearing as a 6x6 stiffness matrix. This approach is applied to a geared shaft system of a commercial gearbox.*

**Key-Words:** rolling bearing, bearing stiffness, bearing modeling.